VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNE GİRİŞ

Hazırlayan: Miray BAŞKURT

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada Volterra İntegral Denklem Sistemleri ele alınacaktır. İkinci Tür Volterra İntegral Denklem Sistemleri için Adomian Ayrıştırma Yöntemi ve Laplace Dönüşümü Yöntemi; Birinci Tür Volterra İntegral Denklem Sistemleri için de Laplace Dönüşümü ve Birinci Türden İkinci Türe Dönüştürerek Çözüm yöntemleri açıklanıp, örneklendirilecektir.

Giriş

İntegral denklem sistemleri üzerinde yapılan çalışmalar uygulamalı bilimlerde fazlasıyla ilgi uyandırmıştır. Lineer ya da lineer olmayan integral denklem sistemlerinin genel fikirleri ve temel özellikleri geniş uygulanabilirliğe sahiptir. Bu denklem sistemleri, mühendislik, fizik, kimya ve nüfus artışı modellerinde kullanılır. Volterra integral denklem sistemleri iki türdedir:

1. Tür Volterra İntegral Denklem Sistemleri

$$u(x)=\int_0^x (K_1(x,t)u(t)+\tilde{K}_1(x,t)v(t)+\dots)dt$$

$$v(x)=\int_0^x (K_2(x,t)u(t)+\tilde{K}_2(x,t)v(t)+\dots)dt$$

$$\vdots$$

Yukarıda genel formu verilmiş Birinci Tür Volterra İntegral Denklem Sistemlerinde bilinmeyen ve belirlenecek olan u(x) ve v(x) fonksiyonları integral işaretinin içindedir.

$K_i(x,t), \tilde{K}_i(x,t)$ çekirdekleri ve $f_i(x)$ fonksiyonları gerçek değerli fonksiyonlar olarak verilir.

Birinci tür Volterra integral denklem sistemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılan iki yöntem **Laplace Dönüşüm Yöntemi** ve **İkinci Türden Bir Volterra İntegral Sistemine Dönüştürme Yöntemi**dir.

2. Tür Volterra İntegral Denklem Sistemleri

$$u(x)=f_1(x)+\int_0^x (K_1(x,t)u(t)+\tilde{K}_1(x,t)v(t)+\dots)dt$$

$$v(x)=f_2(x)+\int_0^x (K_2(x,t)u(t)+\tilde{K}_2(x,t)v(t)+\dots)dt$$

$$\vdots$$

Yukarıda genel formu verilmiş İkinci Tür Volterra İntegral Denklem Sistemlerinde bilinmeyen ve belirlenecek olan u(x) ve v(x) fonksiyonları integral işaretinin içindedir ve dışındadır.

$K_i(x,t), \tilde{K}_i(x,t)$ çekirdekleri ve $f_i(x)$ fonksiyonları gerçek değerli fonksiyonlar olarak verilir.

İkinci tür Volterra integral denklem sistemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılan iki yöntem **Adomian Ayrıştırma Yöntemi** ve **Laplace Dönüşüm Yöntemidir.**

Adomian Ayrıştırma Yöntemi

Bu yöntem, her bir çözümü bu bileşenlerin tekrar tekrar belirlendiği sonsuz bir bileşen toplamı olarak ayrıştırır. Bu yöntem, standart biçiminde kullanılabileceği gibi, gürültü terimleri olgusuyla birlikte de kullanılabilir. Ayrıca, uygun olan her yerde değiştirilmiş ayrıştırma yöntemi kullanılacaktır. Gürültü terimi, var olması durumunda $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ bileşenlerinde yer alan birbirinin aynısı ama zıt işaretlisi olan terimlerdir. Sadece homojen olmayan integral denklemlerde karşılaşılır. $u_0(x)$ ve $u_1(x)$'in gürültü terimlerinin sadeleşmesi sonucunda $u_0(x)$'in kalan terimleri integralin tam çözümü olabilir.

Örnek

Adomian Ayrıştırma Yöntemini kullanarak aşağıdaki 2. tip Volterra integral denklem sistemini çözünüz.

$$u(x)=x-\frac{1}{6}x^4+\int_0^x ((x-t)^2u(t)+(x-t)v(t))dt,$$

$$v(x)=x^2-\frac{1}{12}x^5+\int_0^x ((x-t)^3u(t)+(x-t)^2v(t))dt.$$

Çözüm: $u_n(x)$ ve $v_n(x)$ sırasıyla u(x) ve v(x)'in $n \geq 0$ olacak şekildeki bileşenleridir.

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x) \qquad v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x)$$

u(x) ve v(x) serilerini sistemde yerlerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=x-\frac{1}{6}x^4+\int_0^x ((x-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)+(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}v_n(t))dt,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}v_n(x)=x^2-\frac{1}{12}x^5+\int_0^x ((x-t)^3\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)+(x-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}v_n(t))dt.$$

elde edilir. $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ integral işaretinin dışında kalan terimlerdir. Buradan,

$$u_0(x)=x-\frac{1}{6}x^4, \qquad u_{k+1}(x)=\int_0^x ((x-t)^2u_k(t)+(x-t)v_k(t))dt, \qquad k\geq 0.$$

$$v_0(x)=x^2-\frac{1}{12}x^5, \qquad v_{k+1}(x)=\int_0^x ((x-t)^3u_k(t)+(x-t)^2v_k(t))dt, \qquad k\geq 0.$$

özyinelemeli ilişkileri elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında,

$$u_0(x)=x-\frac{1}{6}x^4, \qquad v_0(x)=x^2-\frac{1}{12}x^5,$$

$$u_1(x)=\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{280}x^7 \qquad v_1(x)=\frac{1}{12}x^5-\frac{11}{10080}x^8$$

$u_0(x)$ ve $u_1(x)$ arasındaki gürültü teriminin $\pm\frac{1}{6}x^4$

$v_0(x)$ ve $v_1(x)$ arasındaki gürültü teriminin ise $\pm\frac{1}{12}x^5$ olduğu açıktır.

Gürültü terimlerini yok edersek, $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ 'deki yok edilmemiş kısımlar denklemi sağlayan tam çözümü verir ve bu

$$(u(x),v(x))=(x,x^2)$$

olarak bulunur.

Laplace Dönüşümü Yöntemi

Konvolüsyon çarpımı $(f_1 * f_2)(x)$ 'in Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(x)\}=\mathcal{L}\{\int_0^x f_1(x-t)f_2(t)dt\}=F_1(s)F_2(s)$$

Bu teorem eşliğinde Laplace dönüşüm yöntemi incelenirse,

Fark çekirdeği formunda K(x,t) fonksiyonuna sahip

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x-t)u(t)dt$$

Volterra integral denkleminin çözümü Laplace dönüşümüyle elde edilebilir.

Örnek

Aşağıdaki Birinci Tür Volterra integral denklem sistemini Laplace dönüşümü yöntemi (LDY) kullanarak hesaplayınız.

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{12}x^4=\int_0^x ((x-t-1)u(t)+(x-t+1)v(t))dt,$$

$$\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4=\int_0^x ((x-t+1)u(t)+(x-t-1)v(t))dt.$$

Sistemdeki denklemlerin her iki tarafına da Laplace dönüşümü uygularsak,

$$\mathcal{L}\{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{12}x^4\}=\mathcal{L}\{(x-t-1)*u(t)+(x-t+1)*v(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4\}=\mathcal{L}\{(x-t+1)u(t)+(x-t-1)*v(t)\}.$$

elde edilir. Buradan,

$$(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s})U(s)+(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s})V(s)=\frac{1}{s^3}+\frac{3}{s^4}+\frac{2}{s^5},$$

$$(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s})U(s)+(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s})V(s)=\frac{3}{s^3}-\frac{1}{s^4}+\frac{2}{s^5}$$

olur. Denklem sistemleri çözüldüğünde,

$$U(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}, \qquad V(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^3}.$$

elde edilir. Her iki denklemin, her iki tarafına da ters Laplace dönüşümleri uygulandığında tam çözüm:

$$(u(x),v(x))=(1+x,1+x^2)$$

olarak bulunur.

SONUÇ

Bu çalışmada Volterra integral denklem sistemleri sınıflandırılmış, bazı çözüm yöntemleri gösterilmiş ve örneklendirilmiştir. Bu yöntemler Adomian Ayrıştırma Yöntemi ve Laplace Dönüşümü Yöntemidir.

KAYNAKLAR

1. Adomian G., "Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method", Kluwer, Boston, 1994
2. Jerri A., *"Introduction to Integral Equations with Applications",* Wiley, New York, 1999
3. Linz P., "Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations", SIAM, Philadelphia, 1985
4. Linz P., "A simple approximation method for solving Volterra integro-differential equations of the first kind", J. Inst. Maths. Appl., 14, 211–215,1974
5. Polyanin A.D. & Manzhirov A.V., "Handbook of Integral Equations", 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2008
6. Rahman M., *"Integral Equations and their Applications",* WIT Press, Dalhousie University, Canada, 2007
7. Wazwaz A.M., *"A First Course in Integral Equations",* 2nd Edition, World Scientific, Singapore, 1997
8. Wazwaz A.M., *"Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications"*, Saint Xavier University, Chicago, 2011